数理解析研究所講究録
29巻 1967年 61-70

Complex torus の complex analytic family についての一考察

名市大 教養部　岡野　節

§1. Kodaira-Spencer[34] において complete でかつ effectively parametrized な complex torus の complex analytic family が具体的に与えられている。ここではさらに一般の complex torus の complex analytic family がどんな型をしているかを考えてみる。

まず Y を既約な解析空間とし、$2n^2$ 個の Y 上の正則函数を要素とする $(n, 2n)$ 型の行列 Ω を考える。Ω の要素を ω_{ij} $(i=1,\cdots n;\ \ j=1,\cdots,2n)$ とする。さらに $(2n, 2n)$ 型行列 $\begin{pmatrix}\Omega\\ \bar{\Omega}\end{pmatrix}$ は各点 $t\in Y$ で正則であると仮定する。
(ここで $\bar{\Omega}$ は Ω の conjugate を表わす。)

$\mathbb{C}^n$ を n 変数 $z=\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}$ をもつ n 次元複素ユークリッド空間とし、$\mathbb{C}^n\times Y$ での analytic automorphism

$$g_j:\quad (z,\ t) \longrightarrow (z-\omega_j(t),\ t),\ (j=1,\cdots,2n,)$$

を考え．この2n個のautomorphismでgenerateされるアーベル群をGで表わす。ただしここで $\omega_j(t) = \begin{pmatrix} \omega_{1j}(t) \\ \omega_{2j}(t) \\ \vdots \\ \omega_{nj}(t) \end{pmatrix}$

である。

このとき．factor space $\mathbb{C}^n \times Y / G$は明らかにcomplex spaceで$Y$上のtorusのcomplex analytic familyが定まる。今 $\mathbb{C}^n \times Y / G = X$とおき．$X$から$Y$へのnaturalなprojectionを$\pi$とおく。明らかに各$t \in Y$に対して $\pi^{-1}(t)$ は $\Omega(t)$ を周期行列にするcomplex torusである。

これから先．以上の行列Ω及びそれから得られたcomplex torusのfamily $X \xrightarrow{\pi} Y$ をfixして考える。そして各$t \in Y$に対して．次の様な記号を用いる。

$X_t = \pi^{-1}(t)$

$K_t = X_t$ 上の有理型函数全体のなす体．

$td(K_t) =$ 体 K_t の複素数体上の超越次数。

$Y_k = \{t \in Y \mid td(K_t) = k\} \quad (n \geqq k \geqq 0)$

§2. 今 $t_0 \in Y_k \ (k > 0)$ の点とする。そうすると変数の変換，

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$ があって．

K_{t_0}の函数は $n-k$個の変数 $w_{k+1}, w_{k+2}, \cdots w_n$に depend しない。

今 $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$ とおく。明らかに

(i) $\operatorname{rank} P = k$.

であり，$\mathbb{C}^k$の中の$2n$個のベクトル $P\Omega_j(t_0)$, $j=1,\cdots 2n$, は$\mathbb{C}^k$の中の rank $2k$の discrete $\overset{\text{free}}{\text{group}}$を生成する。(この事については例えば[0], p 103を見られたい)。その group をG^kとすれば$\mathbb{C}^k/G^k$は明らかに Abelian variety であり，X_{t_0}の有理型函数体K_{t_0}と$\mathbb{C}^k/G^k$の函数体は一致する。

今 $\omega_1', \omega_2' \cdots \omega_{2k}'$を$G^k$の free base とすれば．$(2n, 2k)$型整数行列 H_1があって

$$P\Omega(t_0)H_1 = (\omega_1', \omega_2' \cdots \omega_{2k}') \text{ となる。ただし } \omega_i' = \begin{pmatrix} \omega_{1i}' \\ \vdots \\ \omega_{ki}' \end{pmatrix}.$$

さらに $\omega_1', \omega_2', \cdots \omega_{2k}'$が base である事より $(2k, 2n)$型整数行列 H_2があって

(ii) $P\Omega(t_0)H_1H_2 = P\Omega(t_0)$ となる。

さらに，$\mathbb{C}^k/G^k$が abelian である事より歪対称な $(2k, 2k)$型

整数行列 A があって、$|A|\neq 0$,

(iii) $P\Omega(t_0)H_1A(P\Omega(t_0)H_1)'=0$

(iv) $\sqrt{-1}\,\overline{P\Omega(t_0)H_1}A(P\Omega(t_0)H_1)'<0$

となる。ただしここで $'$ は転置を表わす。

特に今、$t_0\in Y_n$ とする。このときは上の P, H_1, H_2 を単位行列にとれる。

今 Y_n が第二類の集合であると仮定する。このとき各 $t_0\in Y_n$ に対して $(2n,2n)$ 型の歪対称な正則な整数行列 A があって、

$\Omega(t_0)A\Omega(t_0)'=0$ かつ $\sqrt{-1}\,\overline{\Omega(t_0)}A\Omega(t_0)'<0$ となる。

そこで各 $t_0\in Y_n$ に対して この様な A を一つ取って集合 $Y(A)=\{t\in Y\mid \Omega(t)A\Omega(t)'=0\}$ を考える。$Y(A)$ は Y の解析的部分集合であり、又仮定により Y_n は第2類だから、A が整数行列である事より、一つの A があって $Y(A)=Y$ となる。

ところが点 t_0 では $\sqrt{-1}\,\overline{\Omega(t_0)}A\Omega(t_0)<0$ だから Y が連結だから、各点 $t\in Y$ において $\sqrt{-1}\,\overline{\Omega(t)}A\Omega(t)<0$ である。

よって $Y=Y_n=Y(A)$ である。

そこでこの場合は ϑ 函数の理論を用いると任意の $t\in Y$ に対して K_t の元はいつも X_t の近傍までのびる事が分る。

§3.

<u>Lemma 1.</u> F_1 を (l,p) 型, F_2 を (p,l) 型の行列とする。(ただし、$l\geqq p$)。このとき、

(l,l) 型行列 $F_1F_2-E^{(l)}$ の rank は $l-p$ より小さくは

ない。ただし $E^{(l)}$ は l 次の単位行列をあらわす。

証明）$(l.l)$ 行列 F_1F_2 の固有方程式における1の重複度を q と

おくとすうすると non-singular $(l.l)$ 型行列 J があって，

$$JF_1F_2J^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \alpha_{q+1} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha_l \end{pmatrix}$$

となる。ただし $\alpha_i \neq 1$.

よって，$\operatorname{rank} J(F_1F_2-E^{(l)})J^{-1}=\operatorname{rank}(F_1F_2-E^{(l)}) \geqq l-q.$

そこで $q \leqq p$ を示せばよい。

今 $e_i=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdots i$ とおくと，明らかに q 個のベクトル

$JF_1F_2J^{-1}e_i \quad (i=1,\cdots,q)$ は一次独立である。一方 F_2 は

(p,l) 型だから　$q \leq p$ である。

<u>**Lemma 2.**</u> T を $(2n,2n)$ 型実行列 S を $(n,2n)$ 型行列

とする。このとき，

$$\operatorname{rank} ST \geqq \frac{1}{2}\operatorname{rank}\begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix}T.$$

証明）行列の rank はその行列の定める linear map の image

の次元である。T が real だから ST の rank と $\bar{S}T$ の rank は

一致しており $\begin{pmatrix} S \\ \bar{S} \end{pmatrix}T : \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ の image は

$ST: \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n}$ の image と $\overline{ST}: \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^{n}$ の image の直和に入っているから $2\,\mathrm{rank}\,ST \geqq \mathrm{rank}\begin{pmatrix} S \\ \overline{S} \end{pmatrix} T$。 Q.E.D.

次に $t_0 \in Y_k$, $k>0$ とする。前に述べた事をまとめると、4つの行列 A, P, H_1, H_2 があって

(i) $\mathrm{rank}\, P = k$

(ii) $P\Omega(t_0)(H_1H_2 - E^{(2n)}) = 0$

(iii) $P\Omega(t_0)H_1 A (P\Omega(t_0)H_1)' = 0$

(iv) $\sqrt{-1}\,\overline{P\Omega(t_0)H_1}\,(P\Omega(t_0)H_1)' < 0$.

逆にもし $t \in Y$ に対して、H_1, H_2, P があって (i) $\mathrm{rank}\, P = k$, (ii) $P\Omega(t)H_1H_2 = P\Omega(t)$ であれば $P\Omega(t)$ の $2n$ 個の列ベクトルは $\mathbb{C}^k$ の rank $2k$ の discrete free group を生成しさらに $P\Omega(t)H_1$ の $2k$ 個の列ベクトルがこの group の free base を与えている。

そこで、3つの行列 H_1, H_2, A を fix する。又 $Y(H_1H_2) = \{ t \in Y \mid$ 上の条件 (i) と (ii) を(少なくとも)みたす (k,n) 行列 P がある $\}$,

$Y(H_1H_2, A) = \{ t \in Y \mid$ 上の4つの条件 (i)〜(iv) を(少なくとも)みたす (k,n) 行列 P が存在する $\}$ とおく。

今 Π を型 (k,n) の行列の全体のなす $k \times n$ 次元のベクトル空間とし $\Pi \times Y$ 上の方程式 $P\Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) = 0$, $t \in Y$, $P \in \Pi$, の解を $\mathfrak{P}$ とおき、$\mathfrak{P}$ から Y への natural proj を p とおく。

このとき $p^{-1}(t)$ は Π の vector subspace である。さらに $p^{-1}(t)$ の中に rank が k である行列が存在するための必十条件は

$$\operatorname{rank} \Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) \leqq n-k$$

で与えられる。

<u>Proposition 1.</u> $Y(H_1H_2)$ は $\Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) = n-k$ で与えられる Y の analytic subset で $\mathfrak{P} \mid Y(H_1H_2)$ は次元 k^2 の analytic vector bundle である。

さらに t_1 を $Y(H_1H_2)$ の一点, $P_0 \in p^{-1}(t_1)$ の rank k の matrix とすると、$p^{-1}(t_1)$ の任意の matrix P_1 に対し、(k,k) matrix L があって $P_1 = LP_0$ とかける。

証明）行列 $\begin{pmatrix} \Omega(t) \\ \overline{\Omega(t)} \end{pmatrix}$ が各 $t \in Y$ で non-singular だから Lemma 1 と 2 を用いて $\operatorname{rank} \Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) \geqq n-k$. である。よって $Y(H_1H_2)$ は $\operatorname{rank} \Omega(t)(H_1H_2 - E^{(2n)}) = n-k$ で与えられる。二番目の事柄は $p^{-1}(t_1)$ の次元が k^2 である事より明らか。

<u>Proposition 2.</u> $Y(H_1H_2A)$ は $Y(H_1H_2)$ の analytic subset である。

証明）t_1 を $Y(H_1H_2)$ の点とする。そうすると、t_1 の $Y(H_1H_2)$ での近傍 U と U での vector bundle $\mathfrak{P} \mid Y(H_1H_2)$ の正則な section $P(t)$ があって $\operatorname{rank} P(t) = k$, $t \in U$ と

なる。

このとき上で方程式 $P(t)\Omega(t)H_1A(\overline{P(t)\Omega(t)H_1})'=0$ を考える。

この式の解は U の analytic subset を決める。ところがこの集合は section $P(t)$ のとり方に関係しない。そこで

$N=\{t\in Y(H_1H_2) \mid$ 条件 (i) と (iii) を満たす $P^{-1}(t)$ の行列 P が存在する $\}$ とおけば N は $Y(H_1H_2)$ の analytic subset である。

今 $N_1, N_2, \cdots$ を N の connected components の全体とする。この各 N_i 上では Hermit 行列 $\sqrt{-1}\,\overline{P(t)\Omega(t)H_1}(P(t)\Omega(t)H_1)'$ の符号数は一定である。よって $Y(H_1H_2A)$ は $Y(H_1H_2)$ の analytic subset である。　　　Q.E.D.

<u>Theorem 1.</u> $n>j\geq 0$ なる整数 j に対して $Y_j\neq\phi$ とする。このとき $n\geq q>j$ なる整数 q に対して

$Y_q\cup Y_{q+1}\cup\cdots\cup Y_n$ は Y の thin analytic set の高々可附番個の union である。

証明) $t_0\in Y_k$, $(k\geq q)$ とすれば $t_0\in Y(H_1H_2A)$ なる行列 H_1H_2A がある。$Y_q\cup Y_{q+1}\cup\cdots\cup Y_n$ はこの様な集合の高々可附番個の union である。

§3. 今 $p=\inf\limits_{t\in Y}\ \mathrm{td}(K_t)$ とおく。Theorem 1 により、

Y_p は Y の第2類集合である。よって $(2n, 2k)$ 型行列 H_1 $(2k, 2n)$-行列 H_2, $(2k, 2k)$-行列 A があって $Y = Y(H_1 H_2, A)$ と
なる。ここで この様な行列の system $H_1 H_2, A$ を一つ fix しておく。
前にのべた様に この $H_1 H_2, A$ により Y 上での p^2 次元の analytic vector bundle $\mathfrak{P}$ が得られる。

$t_0 \in Y$, とする。このとき, t_0 の近傍 $\mho$ と $\mho$ 上での $\mathfrak{P}$ の section $P(t)$ で rank $P(t) = p$, $(^\forall t \in \mho)$ なるものがとれる。この section $P(t)$ を用いて丁度周期行列が $P(t)\Omega(t) H_1$ を与える $\mho$ 上の abelian variety の complex analytic family $X'_\mho$ と

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

から決る $X \mid \mho$ から $X'_\mho$ への holomorphic map $\sigma_\mho$ が決る。

さらにこの section $P(t)$ を変えても $X'_\mho$ と $\sigma_\mho$ は変らず ただ座標系 $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{pmatrix}$ が変化するだけである。よって

次の定理をうる。

<u>**Theorem 2.**</u> $p = \inf_{t \in Y} td(K_t)$ とおく。このとき Y 上での p 次元の complex analytic vector bundle $\mathfrak{B} \to Y$ と $\mathbb{C}^n \times Y$ から $\mathfrak{B}$ への holomorphic map $\bar{\sigma}$ があって $\bar{\sigma}$ は local には

$(z, t) \longrightarrow (P(t)z, t)$ の形にかけ（ここで $P(t)$ は $\mathfrak{P}$ の section），さらに $P(t)\Omega(t)$ は $\mathfrak{B}$ の discontinuous な abelian group G' を与え，factor space $\mathfrak{B}/G'$ は Y 上の abelian variety の family をなしている。

さらに σ から natural に X から $\mathfrak{B}/G'$ への holomorphic map σ' があって

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & X' = \mathfrak{B}/G' \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

は commutative になる。

<u>Corollary 1.</u> K_t' を K_t の元で X_t の近傍の有理型函数に拡張出来るもの全体の作す部分体とすると，

(a) K_t' の超越次数は $\inf_{t \in Y} td(K_t)$ に等しい。

(b) K_t' は K_t 内で代数的に閉じている。

<u>Corollary 2.</u> 今 $Y_0 = \phi$ かつ $Y_n \neq Y$ とする。この時 family $X \to Y$ の member である abelian variety は 'singular' である。